



TITLE:

# p-進多様体上のRiemann-Hilbert-de Rham対応(代数的整数論における最近の話題)

AUTHOR(S):

都築, 暢夫

---

CITATION:

都築, 暢夫. p-進多様体上のRiemann-Hilbert-de Rham対応(代数的整数論における最近の話題). 数理解析研究所講究録 1992, 797: 162-173

ISSUE DATE:

1992-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82770>

RIGHT:

## $p$ -進多様体上の Riemann-Hilbert-de Rham 対応

東大理 都築 暢夫 (Nobuo Tsuzuki)

### § 1. はじめに

$p$ -進局所体上の代数多様体 (以下、 $p$ -進多様体) の上の幾何的な起源をもつ  $p$ -進連続層はある種のよい構造をもっていると考えられている。ここでは、 $p$ -進多様体上の  $p$ -進連続層に対して de Rham 層の概念を定義して、それに微分加群を対応させる。さらに、de Rham 層の概念が各種の演算について安定であり、de Rham 層から微分加群への対応は演算と可換になることをしめす。これは、複素多様体上の局所系と微分加群の対応に類似している。しかし、この de Rham 層と微分加群の対応は 1 : 1 ではなく、"stable 層" と呼ばれるべきものに制限しないと 1 : 1 のよい対応はないと思われる。

最初に  $p$ -進局所体の絶対 Galois 群の de Rham 表現について説明する。([I] に詳しくかかれている。)

[Ta] において J. Tate は  $p$ -divisible group の Tate-加群の Hodge-Tate 分解を発見した。その後、J.-M. Fontaine は Hodge-Tate 表現、de Rham 表現、crystalline 表現等を定式化して、 $p$ -進多様体の  $p$ -進 étale cohomology に対するいくつかの予想をたてた [Fo1][Fo2]。Fontaine の予想は、彼自身、W. Messing、S. Bloch、加藤 和也、兵頭 治、G. Faltings ら各氏によりそのかなりの部分が既に解決されている。

Faltings は、[Fa2] の中でいわゆる Fontaine の de Rham 予想を示した。(多様体が、good reduction の場合に、de Rham 予想より精密な crystalline 予想が成りたつこと、および、その層化と相対化が [Fa2] の主要内容である。) 正確に述べるために記号を定める。 $K$  を混標数  $(0, p)$  完備離散付値体で剰余体  $k$  は完全体とする。 $\bar{K}$  を  $K$  の代数閉包とする。 $B_{dR}$  を Fontaine の定義した Galois 群  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$  の作用と減少 filtration をもつ巨大な  $K$ -algebra (実は剰余体が  $\mathbb{C}_p = \widehat{\bar{K}}$  なる完備離散付値体) とする。このとき、 $p$ -進  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$  表現  $V$  が de Rham 表現とは、自然な写像

$$B_{dR} \otimes_K (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\bar{K}/K)} \longrightarrow B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

が同型になることをいう。ただし、 $(\cdot)^{\text{Gal}(\bar{K}/K)}$  は  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -不変部分をあらわす。 $X$  を  $K$  上の完備非特異多様体として、 $X_{\bar{K}} = X \otimes_K \bar{K}$  とする。また、 $\text{IH}_{dR}^*(X/K)$  を  $X$  の  $K$  上の de Rham cohomology とする。

定理. (Faltings) 上の状況のもとで、 $p$ -進 etale cohomology 群

$$H^* = H^*(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) = \varprojlim H^*(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_p$$

は de Rham 表現である。さらに、 $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ -作用、filtration および chern class map を保つ標準的な同型

$$B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^* \cong B_{\text{dR}} \otimes_K \mathbb{H}_{\text{dR}}^*(X/K)$$

が存在する。ただし、 $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  は左辺には対角的 ( $\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K) \mapsto \sigma \otimes \sigma$ ) に作用して、右辺の filtration は  $B_{\text{dR}}$  のそれと  $\mathbb{H}_{\text{dR}}^*(X/K)$  の Hodge filtration との積 filtration とする。

注意. de Rham 予想は 多様体の reduction の様子によらずに成り立つ。

以下では、de Rham 予想の層化と相対化の方針を述べる。

Fontaine の理論の層化および相対化は、兵頭がその緒をひらいた。彼は、[H]で Hodge-Tate 分解のそれをおこなった。Hodge-Tate 構造は、de Rham 構造の  $gr^0$ -部分商であるから、兵頭の理論の一般化として de Rham 予想の層化と相対化とを考える。

Faltings の bounded etale 拡大の理論を用いて局所理論・Fontaine の環  $B_{\text{dR}}$  の高次元化にあたる環  $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$  を構成する。 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$  は Galois 群の作用、減少 filtration、および connection をもつ位相環である。もちろん、兵頭の理論の環  $S_\infty$  は  $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$  の  $gr^0$ -部分商になる。 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$  の構成および性質は §2 で示す。 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$  を用いて局所的に de Rham 表現を定義する。これは rigid etale local な概念である。また、 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$  の connection を利用して de Rham 表現に微分加群を対応させる。

$\mathfrak{B}_{\text{dR}}$  を用いた de Rham 表現の定義は model 上 rigid etale local であることから層化される。また、de Rham 予想の層化および相対化についての主結果とその証明の概略は §4 で述べる。

## §2. 環 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$

Fontaine の環  $B_{\text{dR}}$  の高次元化である環  $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$  を局所的に構成し、その性質を示す。

記号は §1 のままとする。

$R$  を  $O_K$  ( $K$  の整数環) 上有限生成平坦な整閉整域で、 $R[1/p]$  が  $K$  上非特異かつ幾何的既約とする。さらに、 $R$  の  $d$  個 ( $d = \text{rel.dim}_{O_K} R$ ) の単元  $u_i$  の対数微分  $d\log(u_i)$  により微分加群  $\Omega_{R[1/p]/K}^1$  が生成されると仮定する。以後、簡単のために  $\Omega^*$  で  $\Omega_{R[1/p]/K}^*$  をあらわす。

$\bar{R}$  を  $R[1/p]$  の最大 étale 拡大の中での  $R$  の整閉包として、

$$R_\infty = (R \bigotimes_{O_K} O_{\bar{K}})[u_i^{p^{-\infty}}] \text{ の } \bar{R} \text{ における整閉包}$$

と定める。ただし、 $u_i^{p^{-\infty}}$  は  $u_i$  の  $p$  べき根とする。

$R$  は  $O_K$  上 smooth とは限らないので、 $\bar{R}$  は  $R_\infty$  上 almost étale 拡大とはならない[Fa1]。このため  $\bar{R}$  に含まれる  $R_\infty$  の拡大  $C$  でよい条件を満たすものをとってくる必要がある。 $C$  は整閉整域で  $R$  上 Galois 拡大であり、 $u_i$  が  $C$  のよい単元の系とする。すなわち、ある  $p$  べき  $p^e$  が存在して、 $C$  に含まれる  $R_\infty$  の正規拡大  $A$  で  $\frac{1}{p}$  を添加すると  $R_\infty$  上 finite étale になるものに対して、

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}) \quad & \text{tr}_{A[1/p]/R_\infty[1/p]}(A) \subset p^e R_\infty \\ (\mathcal{I}) \quad & (A \bigotimes_{R_\infty} A)[1/p] \rightarrow A[1/p] \quad (x \otimes y \mapsto xy) \end{aligned}$$

に対するべき等元  $e_{A/R_\infty}$  は  $p^e$  倍すると整元になる。

をみたすものとする。もちろん、 $R$  が  $O_K$  上 smooth (good reduction の場合) のときには  $C = \bar{R}$  とできる。

さらに、 $\Gamma = \text{Gal}(C/R)$ 、 $\Delta = \text{Gal}(C/R \bigotimes_{O_K} O_{\bar{K}})$  とおく。

この状況のもとで、 $R$  と  $C$  とに關手的な以下の性質がなりたつ環  $\mathfrak{B}_{\text{dR}} = \mathfrak{B}_{\text{dR}}(R, C)$  を構成する。ただし、 $S_\infty = S_\infty(R, C)$  を兵頭氏の定義した環として[H]、 $B_{\text{dR}} = B_{\text{dR}}(R, C)$  を Faltings の定義した環とする[Fa2]。

( $\mathcal{A}$ )  $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$  は  $B_{\text{dR}}$ -algebra で、減少 filtration  $\{\mathfrak{B}_{\text{dR}}^r\}$ 、 $\Gamma$ -作用、Griffith transversality を満たす integrable な  $B_{\text{dR}}$ -connection をもつ。また、 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$  には、 $B_{\text{dR}}$  の integral 構造と可換なそれがいり、 $(\mathfrak{B}_{\text{dR}}^r, p)$ -進位相に関して完備である。

( $\mathcal{I}$ ) 次数付き  $\Gamma$ -algebra の標準的な同型

$$\text{gr} \cdot \mathfrak{B}_{\text{dR}} \cong \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} S_\infty(r)$$

がある。ただし、 $(r)$  は Tate-twist とする。

( $\mathcal{U}$ ) 連続 cohomology 群は次のようになる。

$$\begin{aligned} H^i(\Delta, \mathfrak{B}_{\text{dR}}) &= \begin{cases} (\hat{R}[1/p] \bigotimes_K B_{\text{dR}}(O_K))^\Gamma & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases} \\ H^i(\Gamma, \mathfrak{B}_{\text{dR}}) &\cong \begin{cases} \hat{R}[1/p] & (i = 0 \text{ または } 1) \\ 0 & (i \neq 0, 1) \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、 $B_{dR}(O_K)$  は Fontaine の定義した環で  $\wedge$  は  $p$ -進完備化をあらわす。

(エ)  $B_{dR}$ -connection  $\mathfrak{B}_{dR} \rightarrow \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{dR}$  から決まる  $\Gamma$ -加群の複体

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{B}_{dR} & \rightarrow & \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{dR} & \rightarrow & \Omega^2 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{dR} \rightarrow \cdots \\ \text{degree} & & (0) & & (1) & & (2) \end{array}$$

を  $DR$  とおき、その第  $r$ -filtration  $DR^r$  を

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{B}_{dR}^r & \rightarrow & \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{dR}^{r-1} & \rightarrow & \Omega^2 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{dR}^{r-2} \rightarrow \cdots \\ & & (0) & & (1) & & (2) \end{array}$$

で定めると、自然な複体射  $B_{dR} \rightarrow DR$  は filtered quasi-isomorphism となる。

(オ) 非退化な pairing

$$DR \times DR \longrightarrow DR$$

が存在する。(cup 積)

(カ)  $(R_1, C_1), (R_2, C_2)$  を先の条件を満たす対とするとき

$$DR(R_1) \overset{L}{\otimes} DR(R_2) \longrightarrow DR(R_1 \overset{\circ}{\otimes}_{O_K} R_2)$$

は、filtered quasi-isomorphism である。(Künneth formula)

注意.  $R$  が  $W(k)$  上 bad reduction の場合いを扱うためには、 $\overline{R}$  は  $R_\infty$  上必ずしも almost etale 拡大でないので  $(R, C)$  を考える必要がでてくる。

Hodge-Tate 理論の高次元化において古典理論の  $\mathbb{C}_p$  に対応するのは  $\widehat{R}[1/p]$  ではなく  $S_\infty$  である。その理由は、標数  $p$  に reduction したときに環  $R$  は完全 ( $p$ -乗写像が全射) でないから、 $p$ -基底に対応して連続 cohomology 群

$$H^i(\Gamma, \widehat{C}[1/p](r))$$

は古典的な場合のように消えない。 $(S_\infty$  ならば  $((i, r) \neq (0, 0), (1, 0))$  をのぞいて消える。) de Rham 構造の  $gr^0$ -部分商が Hodge-Tate 構造であることを考えると、 $\mathfrak{B}_{dR}$  は上の性質 (ア)-(カ) を満たす必要がある。さらに、 $\mathfrak{B}_{dR}$  の  $B_{dR}$ -connection は de Rham 表現に対して  $\widehat{R}$  上の locally free 層の複体に対応するので自然に定まる。

以下、 $\mathfrak{B}_{dR}$  を構成する。

$R_0 = O_K[T_i^{\pm 1}; i = 1, \dots, d]$ ,  $C_0 = O_K[T_i^{\pm p^{-\infty}}]$  とおき、 $T_i^{p^{-n}} \mapsto u_i^{p^{-n}}$  で環準同型

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \longrightarrow & R \\ \cap & & \cap \\ C_0 & \longrightarrow & C \end{array}$$

を定める。また、 $C_0$  への  $\Gamma$  の作用は  $C$  への作用から自然に導かれるものとする。最初に、

$$S = \text{projective limit } (C_0/pC_0 \xleftarrow{p \text{ 乗}} C_0/pC_0 \xleftarrow{p \text{ 乗}} \dots)$$

とすると、 $S$  の元は  $s_n = s_{n+1}^p$  なる  $C_0/pC_0$  の元の列  $s = \{s_n\}$  であらわされる。 $C_0 = C_0^p + pC_0$  ( $C_0/pC_0$  は完全環) であるから、環準同型

$$\begin{array}{ccc} W_n(S) & \longrightarrow & C_0/p^n C_0 \\ [s_1, \dots, s_n] & \mapsto & \tilde{s}_{1n}^{p^{n-1}} + p\tilde{s}_{2n}^{p^{n-2}} + \dots + p^{n-1}\tilde{s}_{nn} \end{array}$$

は全射となる。ここで、 $W_n(S)$  は長さ  $n$  の  $S$ -係数 Witt vector で  $\tilde{s}$  は  $C_0/pC_0$  の元  $s$  の  $C_0$  への持ち上げをあらわす。ideal  $(p)$  の自然な P.D.-構造と可換な上の全射の核に対する P.D.-包絡環を  $B_n$  として、 $I_n^{[m]}$  を第  $m$  次 P.D.-ideal とする。次に、

$$D_{0m} = (\varprojlim_n B_n / I_n^{[m]})[1/p]$$

とおく。 $C$  は  $R_\infty (= R_0 \otimes C_0$  の  $\bar{R}$  における整閉包) 上 bounded etale covering より、全射

$$D_{0m} \longrightarrow \hat{C}_0[1/p]$$

に対して、 $p$ -進完備なその持ち上げ  $\hat{R}[1/p]$ -algebra  $D_m$  で整構造を持ち、図式

$$\begin{array}{ccc} D_{0m} & \longrightarrow & \hat{C}_0[1/p] \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_m & \longrightarrow & \hat{C}[1/p] \text{ (全射)} \end{array}$$

が可換になるものが唯一存在する。射影系  $\{D_m\}$  に対してその射影極限を

$$B_{\text{dR}}^+ = B_{\text{dR}}^+(R, C) = \varprojlim_m D_m$$

であらわす。ところで、

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p(1) &\longrightarrow W_n(S) \\ \zeta = \{\zeta_n\} &\mapsto [\zeta^n, 0, \dots, 0] \end{aligned}$$

から、 $\Gamma$ -準同型

$$\alpha: \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow B_{\text{dR}}^+$$

が定まる。この写像は全射  $B_n \mapsto C_0/p^n C_0$  による  $\zeta = \{\zeta_n\} \in \mathbb{Z}_p(1)$  の  $B_n$  への持ち上げ  $\tilde{\zeta}_n$  に対して  $(\tilde{\zeta}_n)^{p^n}$  をとったものの射影系により定まるものである。 $\mathbb{Z}_p(1)$  の生成元  $\zeta$  を一つ固定して、 $B_{\text{dR}}^+$  の元

$$t = \log(\alpha(\zeta)) = \sum (-1)^{k-1} \frac{(\alpha(\zeta) - 1)^k}{k}$$

を定める。これは  $\alpha(\zeta) - 1 \in I_n^{[1]}$  より P.D.-環の性質で  $B_n$  において有限和となり、 $B_{\text{dR}}$  の中で収束する。

環  $B_{\text{dR}} = B_{\text{dR}}(R, C)$  とその filtration を

$$\begin{aligned} B_{\text{dR}} &= B_{\text{dR}}^+[t^{-1}] \\ B_{\text{dR}}^* &= t^* B_{\text{dR}}^+ \end{aligned}$$

で定義する。これは、 $\mathbb{Z}_p(1)$  の生成元  $\zeta$  のとり方によらず決まる。このとき、 $\log \circ \alpha$  によって、

$$\widehat{C}[1/p](r) \cong gr^* B_{\text{dR}}$$

が導かれる。これが Faltings の  $B_{\text{dR}}$  である。

さて、 $E = B_{\text{dR}}^+[V_i; i = 1, \dots, d]$  とおき、

$$E \longrightarrow \widehat{C}[1/p]$$

を  $V_i \mapsto 0$  かつ  $B_{\text{dR}}^+$  上では通常として定める。さらに、

$$J_m = \{x_1 \cdots x_m; x_i \in \ker(E \rightarrow \widehat{C}[1/p])\} \text{ で生成される ideal}$$

として、 $E_m = E/J_m$  とする。すると、 $E_m$  は  $p$ -進完備な  $D_m$ -algebra になる。環準同型  $R_0[1/p] \rightarrow E_m$  を

$$T_i \mapsto \frac{[\{u_i^{p^{-n+1}}\}, 0, \dots]}{1 + V_i}$$

で定めると、 $R[1/p]$  は  $R_0[1/p]$  上 etale より  $\widehat{R}[1/p] \rightarrow E_m$  に延びる。  
 $E_\infty = \varprojlim_m E_m$  とする。さきに固定した  $t \in B_{\text{dR}}^1$  を用いて、 $E_\infty[t^{-1}]$  の中で、

$$E_\infty^+ = \bigcup_{m \geq 0} t^{-m} \ker(E_\infty \rightarrow E_m)$$

とおく。 $D_m$  の整構造は  $E_\infty^+/t^m E_\infty^+$  の整構造を導き、各  $E_\infty^+/t^m E_\infty^+$  は  $p$ -進完備な  $D_m$ -algebra となる。この  $m$  に関する完備化を

$$\mathfrak{B}_{\text{dR}}^+ = \varprojlim_m E_\infty^+/t^m E_\infty^+$$

とする。これより、求める環  $\mathfrak{B}_{\text{dR}} = \mathfrak{B}_{\text{dR}}(R, C)$  が

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{\text{dR}} &= \mathfrak{B}_{\text{dR}}^+[t^{-1}] \\ \mathfrak{B}_{\text{dR}}^\tau &= t^\tau \mathfrak{B}_{\text{dR}}^+ \end{aligned}$$

と定まる。

$\sigma \in \Gamma$  の  $\{u_i^{p^{-n}}\}$  への作用を  $\zeta \in \mathbb{Z}_p(1)$  とする。このとき、 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$  への  $\Gamma$  の作用を

$$\sigma(1 + V_i) = \alpha(\zeta)(1 + V_i)$$

で定める。

また、 $D_m$ -準同型

$$E_m \longrightarrow \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} E_{m-1}$$

を、 $1 + V_i \mapsto -d\log(u_i) \otimes (1 + V_i)$  で定めると、これは  $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$  上で integrable な  $B_{\text{dR}}$ -connection

$$\nabla : \mathfrak{B}_{\text{dR}} \longrightarrow \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{\text{dR}}$$

を定める。その定義より Griffith-transversality  $\nabla(\mathfrak{B}_{\text{dR}}^\tau) \subset \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{\text{dR}}$  を

みたす。

兵頭氏の環  $S_\infty$  との関係は次のようになる。

$\Gamma$ -加群の標準的な拡大

$$0 \rightarrow \widehat{C}[1/p] \rightarrow M \rightarrow \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \widehat{C}[1/p](-1) \rightarrow 0$$

$$M = \varprojlim_n (\Omega_{C/R}^1)_{p^n\text{-torsion}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p(-1)$$



により [Fa1]、環  $S_\infty = S_\infty(R, C)$  は、

$$S_\infty = \varinjlim_m \operatorname{Sym}_{\widehat{C}[1/p]}^m M$$

$$\operatorname{Sym}_{\widehat{C}[1/p]}^m M \rightarrow \operatorname{Sym}_{\widehat{C}[1/p]}^{m+1} M \quad [x_1 \otimes \cdots \otimes x_m] \mapsto [1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_m]$$

で定義される。 $\widehat{C}[1/p]$ -加群の準同型

$$\ker(E_2 \rightarrow E_1) \rightarrow \left( \varprojlim_n (\Omega_{C/R}^1)_{p^n\text{-torsion}} \right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

を  $t \mapsto \{d\log(\zeta_n)\}$  ( $\{\zeta_n\}$  は  $t$  を定めるとき固定した 1 のべき根)、 $V_i \mapsto \{d\log(u_i^{p^{-n}})\}$  で定めると、これは  $\Gamma$ -準同型となり  $\otimes \mathbb{Q}_p(-1)$  することにより同型

$$\ker(E_2 \rightarrow E_1)(-1) \rightarrow M$$

を得る。積構造から、 $\Gamma$ -同型

$$\ker(E_{m+1} \rightarrow E_m) \rightarrow \operatorname{Sym}_{\widehat{C}[1/p]}^m M$$

が誘導され、これより  $\Gamma$ -同型

$$gr^0 \mathfrak{B}_{dR} \cong S_\infty$$

が得られる。

また、 $S_\infty$  の連続 cohomology 群は、

定理. (兵頭)

$$H^i(\Delta, S_\infty) = \begin{cases} (R \otimes_{O_K} \widehat{O_K})[1/p] & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

$$H^i(\Gamma, S_\infty(r)) \cong \begin{cases} \widehat{R}[1/p] & (i, r) = (0, 0) \text{ または } (1, 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる。

$\mathfrak{B}_{dR}$  の位相に関する論議と spectral 系列

$$E_1^{a,b} = H^{a+b}(\Delta, S_\infty(a)) \longrightarrow H(\Delta, \mathfrak{B}_{dR})$$

により  $\mathfrak{B}_{dR}$  の連続 cohomology 群を求まる。

注意. 今まで述べてきた局所理論の相対化についてふれる。

$$(R, C) \rightarrow (R', C')$$

をさきの条件をみたす対の間の環準同型で、 $R'[1/p]$  は  $R[1/p]$  上 smooth かつ幾何的既約とする。 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}(R', C')$ 、 $B_{\mathrm{dR}}(R', C')$  をそれぞれ  $\mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}}$ 、 $B'_{\mathrm{dR}}$  であらわし、 $\Gamma' = \mathrm{Gal}(C'/R')$ 、 $\Delta' = \mathrm{Gal}(C'/R' \otimes_R C)$ 、 $\Omega^* = \Omega^*_{R'[1/p]/R[1/p]}$  と記号を定める。この状況で連続 cohomology 群は

$$H^i(\Delta, \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}}) = \begin{cases} (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{B_{\mathrm{dR}}} B'_{\mathrm{dR}})^\wedge & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

$$H^i(\Gamma, \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}}) \cong \begin{cases} (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widehat{R}[1/p]} \widehat{R}'[1/p])^\wedge & (i = 0 \text{ または } 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる。 $\Gamma$ -加群の減少 filtration 付き複体  $DR'$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}} & \rightarrow & \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}} & \rightarrow & \Omega^2 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}} \rightarrow \cdots \\ \text{degree} & & (0) & & (1) & & (2) \end{array}$$

も同様に定義されて、自然な複体射  $(\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{B_{\mathrm{dR}}} B'_{\mathrm{dR}})^\wedge \rightarrow DR'$  が filtered quasi-isomorphism になる。また、cup 積、Künneth formula もある。

### §3. de Rham 表現

$V$  を  $p$ -進  $\Gamma$ -表現、すなわち、 $\Gamma$ -作用をもつ有限次元  $\mathbb{Q}_p$ -ベクトル空間とする。

定義.  $V$  が  $\Gamma$  に関する de Rham 表現とは、自然な写像

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widehat{R}[1/p]} (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \longrightarrow \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

が同型になることをいう。

Tate-twist  $\mathbb{Q}_p(r)$  は、 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}(r) = \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}\{r\}$  (filtration の  $r$  回 twist) と  $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$  の性質 (ウ) より de Rham 表現となる。

de Rham 表現の圏は、直和、tensor 積、双対、引きもどしに関して閉じている。

de Rham 表現  $V$  に対して

$$\mathrm{DR}(V) = (\mathrm{DR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\Gamma}$$

と定める。すると、これは locally free  $\widehat{R}[1/p]$ -加群の filtration 付きの複体になる。 $\mathrm{DR}(\cdot)$  は、cup 積および Künneth formula をもつ。

de Rham 層を定義するにあたって次の補題が重要である。

補題.  $\Pi(R_\lambda, C_\lambda)$  を先の条件をみたす対で、 $\Pi \mathrm{Spec} R_\lambda \rightarrow \mathrm{Spec} R$  を rigid etale covering とする。このとき、 $V$  が  $(\mathrm{Spec} R)_{\mathrm{et}}$  上の de Rham 表現であることと、各  $\lambda$  に対して  $V$  が  $(\mathrm{Spec} R_\lambda)_{\mathrm{et}}$  上の de Rham 表現であることは同値である。

これより、de Rham 層の概念は rigid etale 的な性質になる。

注意. §2 の最後の注意と同様に今まで述べてきた局所理論の相対化もある。

#### §4. 比較定理

$X$  を  $K$  上の完備非特異多様体で、 $\mathfrak{X}$  をその  $O_K$  上の proper flat model とする。[Fa2][Fa3]より、 $\Pi(R_\lambda, C_\lambda)$  で §2 の条件をみたし、 $\Pi \mathrm{Spec} R_\lambda \rightarrow \mathfrak{X}$  が rigid etale covering になるものが存在する。

定義.  $V$  を  $X_{\mathrm{et}}$  上の smooth  $\mathbb{Q}_p$ -層とする。 $V$  が de Rham 層とは、各  $(R_\lambda, C_\lambda)$  上で  $V$  が de Rham 表現になることをいう。

§3 の補題より、この定義は rigid etale covering のとり方によらない。

$V$  を de Rham 層とする。各  $(\mathrm{Spec} R_\lambda[1/p])_{\mathrm{et}}$  上で  $(\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\Gamma}$  は、locally free 層となるから  $\mathfrak{X}$  の rigid etale site 上の locally free 層となる。 $X$  は  $K$  上 proper より代数化可能で、 $X$  上の locally free 層が得られる[EGA III]。同様に、複体  $\{\mathrm{DR}(V)_\lambda\}$  も代数化可能で、 $X$  上の locally free 層の減少 filtration 付きの複体となる。この複体を  $\mathrm{DR}(V)$  とかくことにする。

$(R, C)$  を §2 の条件をみたす対として、 $f: X \rightarrow \mathrm{Spec} R[1/p]$  を proper smooth morphism とする。 $\overline{X} = X \otimes_{R[1/p]} \overline{R}[1/p]$  とおく。

主定理.  $V$  を  $X_{\mathrm{et}}$  上の de Rham 層とすると、 $H^i(\overline{X}, V)$  は  $R[1/p]$  上の de Rham 表現となる。さらに、次の標準的な同型

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^i(\overline{X}, V) \cong \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widehat{R}[1/p]} H^i(X, \mathrm{DR}(V))$$

が存在する。この同型は、Galois 群の作用、filtration、chern class map を保つ。ただし、 $\mathbb{H}^*(X, \mathrm{DR}(V))$  は  $\mathrm{DR}(V)$  の hypercohomology とする。

証明は [Fa1][Fa2] の論議と同様である。その概略は以下のようになっている。

両辺の cohomology は  $\mathfrak{X}$  上の hyper rigid etale covering の hyper c ech cohomology で計算できる。 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$  の局所理論により、両者を計算する複体を rigid etale local に結ぶ。

$\mathfrak{X}$  上の rigid etale local な  $\Delta'$ -cochain の図式

$$\begin{array}{ccc} C^*(\Delta', (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}} B'_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) & \xrightarrow{a} & C^*(\Delta', \mathrm{DR}' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \\ & \xleftarrow{b} & C^*(\Delta', \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widehat{R}'[1/p]} \mathrm{DR}'(V)) \\ & \xleftarrow{c} & \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widehat{R}[1/p]} \mathrm{DR}'(V) \end{array}$$

を考える。上の図式で  $\Delta'$ 、 $\mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}}$ 、 $\mathrm{DR}'$  は §2 の最後の注意の中の記号で、それぞれ  $R'/R$  の相対 Galois 群、環  $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}(R', C')$ 、 $\widehat{R}'[1/p]/\widehat{R}[1/p]$  上の相対複体を表す。この図式で  $a$  と  $c$  とは環  $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$  の性質より quasi-isomorphism であり、 $b$  は de Rham 層の定義より同型となる。

$\Delta'$ -cochain  $C^*(\Delta', V)$  の rigid etale hypercovering を走らせた hypercohomology 群は、rigid etale cohomology の性質より etale cohomology 群  $\mathbb{H}^*(\overline{X}, V)$  と自然に同型となる。(torsion のときの差が十分小さい  $p$ -べき) 先の  $\Delta'$ -cochain と cochain 射

$$C^*(\Delta, V) \rightarrow C^*(\Delta', (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}} B'_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$$

とを合わせ、自然な変換

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{H}_{\mathrm{ t}}^i(\overline{X}, V) \longrightarrow \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widehat{R}[1/p]} \mathbb{H}^i(X, \mathrm{DR}(V))$$

を得る。具体的な計算により、vector bundle の chern class が上の自然な変換で可換になることが示せる。このことと normal cone の変形理論とから characteristic class の可換性が導かれる。これより、両者の Poincaré 双対性が可換になることがいえる。したがって、上の変換は直和因子への同型となる。対角成分の特性類の可換性より、逆写像も Poincaré 双対性と可換になり定理を得る。

#### 参考文献

- [BO] Berthelot, P. and Ogus, A., "Note on crystalline cohomology," Princeton University Press, 1978.

- [Fa1] Faltings, G., *p-adic Hodge theory*, J. Am. Math. Soc. **1** (1988), 255–299.
- [Fa2] Faltings, G., *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Algebraic and Analysis, Geometry and Number Theory, Johns Hopkins University Press (1990), 25–80.
- [Fa3] Faltings, G., Letter.
- [Fo1] Fontaine, J.-M., *Modules Galoisien, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate*, Astérisque **65** (1979), 3–80.
- [Fo2] Fontaine, J.-M., *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local, construction d'un anneau Barsotti-Tate*, Ann. of Math. **115** (1982), 529–577.
- [H] Hyodo, O., *On variation of Hodge-Tate structures*, Math. Ann. **284** (1989), 7–22.
- [I] Illusie, L., *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique [d'après G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.]*, Séminaire Bourbaki 1989 / 90, exposé n°726.
- [Ta] Tate, J., *p-divisible groups*, Proceedings of a Conference on Local Fields (1967), 158–183, Springer, Berlin.
- [Tsu] Tsuzuki, N., *Variation of p-adic de Rham structures*, Preprint.
- [EGA III] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., *Eléments de Géométrie Algébrique III*, Publ. Math. IHES **11** (1961); **17** (1963).